Applications

On se place dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

1 Pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

On rappelle les caractérisations du parallélogramme :

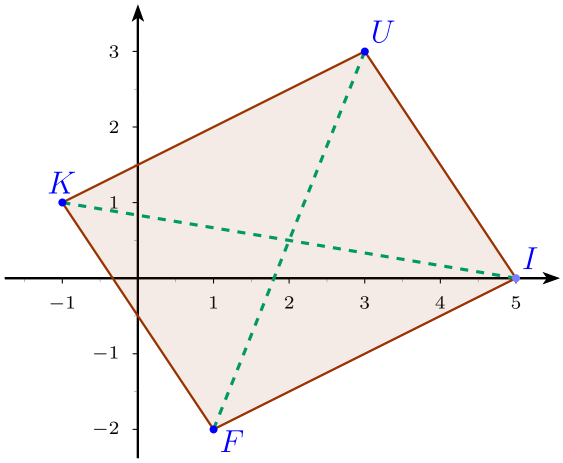
Proposition

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

La méthode la plus simple est donc, connaissant les coordonnées des quatre sommets, de trouver les coordonnées des milieux des diagonales et de montrer qu'ils sont identiques.

Exemple.
On considère dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points $U(3;3)$, $F(1;-2)$, $K(-1;1)$, $I(5;0)$.
Montrer que le quadrilatère UIFK est un parallélogramme.

Il faut faire un dessin.



On calcule les milieux des segments $[UF]$ et $[KI]$:

- On a en notant M_1 le milieu du segment $[UF]$:

$$\begin{cases} U\left(3\ ;\ 3\right) \\ F\left(1\ ;\ -2\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{M_1} &= \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ y_{M_1} &= \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow M_1\left(2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

  Donc le milieu de $[UF]$ est de coordonnées $(2; 0,5)$;
- On a en notant M_2 le milieu du segment $[KI]$:

$$\begin{cases} K\left(-1\ ;\ 1\right) \\ IF\left(5\ ;\ 0\right) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{M_2} &= \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ y_{M_2} &= \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow M_2\left(2\ ;\ \frac{1}{2}\right)$$

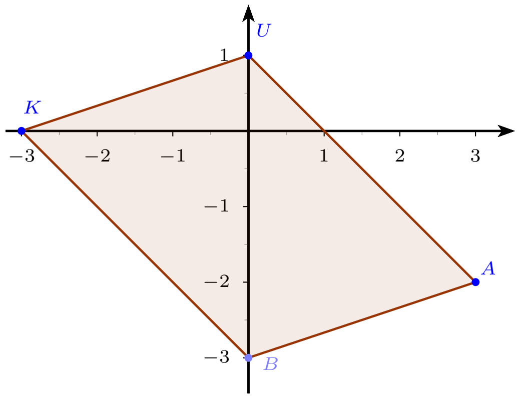
  Donc ce milieu de $[KI]$ est de coordonnées $(2; 0,5)$.

Le quadrilatère $UIFK$ a donc ses diagonales $[UF]$ et $[KI]$ qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme d'après la propriété 3.

Proposition

Si un quadrilatère a ses côtés opposés qui ont la même mesure, alors c'est un parallélogramme.

Exemple : dans un R.O.N. On considère les points $A(3;-2), B(0;-3), K(-3;0), U(0;1)$ dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. Le quadrilatère $ABKU$ est-il un parallélogramme ?



On est dans un RON donc le calcul des distances avec les formules usuelles est légitime.

$$\begin{cases} A(3;-2) \\ B(0;-3) \\ K(-3;0) \\ U(0;1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{(0-3)^2+(-3+2)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \\ UK = \sqrt{(-3-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{10} \\ UA = \sqrt{(3-0)^2+(-2-1)^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} \\ KB = \sqrt{(0+3)^2+(-3-0)^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} \end{cases}$$

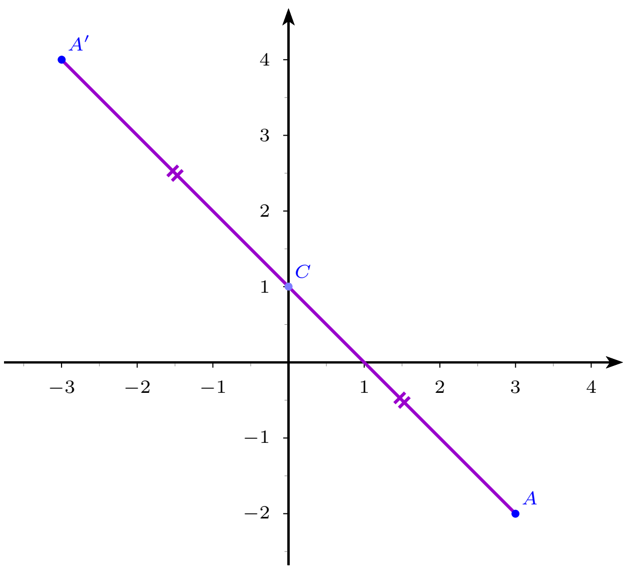
- $AB = UK = \sqrt{10}$ u.l.
- $UA = KB = \sqrt{18}$ u.l.

u.l. = unité de longueur

Le quadrilatère $ABKU$ a ses côtés opposés qui ont la même mesure, c'est donc un parallélogramme d'après la propriété 4.

2 Pour calculer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie centrale

Exemple.
Soit dans le repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points A et C de coordonnées $A(3;-2), C(0;1)$.
Déterminer les coordonnées du point A', image du point A par la symétrie de centre C.



Le point A' est l'image du point A par la symétrie de centre C signifie que C est le milieu du segment $[AA']$.

$$C = mil[AA'] \Longleftrightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_C = \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 0\,(\times 2) = \dfrac{3 + x_{A'}}{2}\,(\times 2) \\ 1\,(\times 2) = \dfrac{-2 + y_{A'}}{2}\,(\times 2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = 3 + x_{A'} \\ 2 = -2 + y_{A'} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{A'(-3;4)}$$

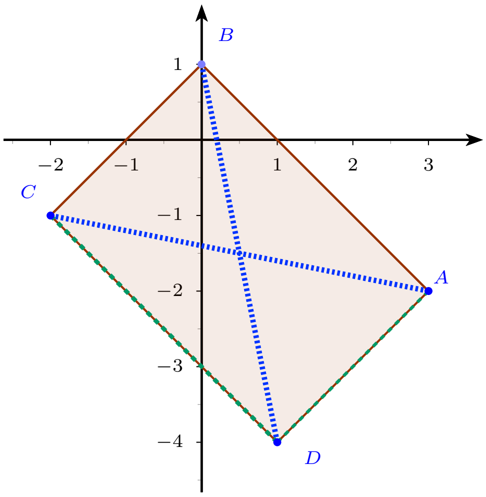
3 Pour calculer les coordonnées du point D pour que ABCD soit un parallélogramme

D'après la propriété précédente, il suffit de remarquer que les coordonnées vérifie l'égalité des coordonnées des milieux des diagonales.

Exemple

On considère dans un repère $(O\ ;\ I\ ;\ J)$ les points $A(3;-2)$, $B(0;1)$ et $C(-2;-1)$. Déterminer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Attention Danger !
La principale source d'erreurs ici est l'ordre des point. Il faut impérativement faire un dessin même si ce n'est pas demandé et construire le parallélogramme en respectant l'ordre des points.



On écrit que $ABCD$ parallélogramme si et seulement si les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu soit ici avec :

$$\begin{cases} A(3;-2) \\ B(0;1) \\ C(-2;-1) \end{cases} \implies \quad mil[AC] = mil[BD] \iff \begin{cases} \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{3-2}{2}\,(\times 2) = \dfrac{0 + x_D}{2}\,(\times 2) \\ \dfrac{-2-1}{2}\,(\times 2) = \dfrac{1 + y_D}{2}\,(\times 2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = 0 + x_D \\ -3 = 1 + y_D \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = x_D \\ -4 = y_D \end{cases}$$

Le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme est donc de coordonnées : $\boxed{D(1;-4)}$